ABHANDLUNGEN UND MITTHEILUNGEN.

Einige allgemeine Sätze zur Theorie der Reihen.

Von **Dr. Anton Winckler,**

Professor in Gratz.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 18. Mai 1860.)

Unter den bekannten Methoden, gegebene Functionen in unendliche Reihen zu entwickeln, oder aus gegebenen Entwickelungen neue abzuleiten, sind gerade die wichtigsten sehr erheblicher Verallgemeinerungen fähig, vermöge welcher das jenen Methoden zu Grunde liegende Princip erst seine volle Bedeutung zu erhalten scheint. Dies ist unter anderem der Fall bei der, in neuerer Zeit mit Recht wieder mehr beachteten, allgemeinsten Form der Potenzreihen, wie solche die zuerst von Bürmann gestellte und auch gelöste Aufgabe: eine gegebene Function nach Potenzen einer andern gegebenen Function zu entwickeln, liefert.

Ebenso ist der bekannte Satz von Parseval einer beträchtlichen Erweiterung fähig und lassen sich, demselben analog, neue Reihen aus solchen bilden, welche nach der Fourier'schen Form entwickelt sind.

Mit den soeben genannten Gegenständen wird sich das Folgende in dem angedeuteten Sinne beschäftigen und, bezüglich der Bürmann'schen Reihe, welche den grössten Theil der vorliegenden Arbeit in Anspruch nehmen wird, zugleich eine in vielen Fällen einfachere Methode der Coëfficientenbestimmung, eine Darstellung des Restausdruckes u. s. w. enthalten.

Da es in diesem so vielfach bearbeiteten Felde nicht zu vermeiden ist, dass bereits bekannte Resultate den Betrachtungen zu

Grunde gelegt werden, oder derselben sonst Erwähnung geschehe, so werde ich in jedem solchen Falle die Quelle, so weit sie mir bekannt ist, angeben.

1.

Bezeichnet $f(x)$ die nach Potenzen von $\varphi(x)$ zu entwickelnde Function, so dass

$$f(x) = A_0 + A_1\varphi(x) + A_2\varphi(x)^2 + \ldots + A_n\varphi(x)^n + \ldots$$

und ist $x = a$ ein Werth, wofür $\varphi(x)$ verschwindet, dann ist die übliche, zuerst von Bürmann (siehe *Mémoires de l'Institut*, t. II, p. 14, 15) aufgestellte Form des Coëfficienten A_n gegeben durch die Gleichung:

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\;\frac{d^{n-1}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n \frac{df(x)}{dx}\right]}{dx^{n-1}} \text{ für } x = a,$$

welche diesen Coëfficienten wenigstens scheinbar in ziemlich einfacher Weise darstellt.

Man kann aber auf dem folgenden sich von selbst anbietenden Wege zu einer ganz anderen Bestimmung der Coëfficienten und zugleich zu dem Restausdruck gelangen, welcher hinzuzufügen ist, wenn man die Reihe bei irgend einem Gliede abbricht. Es sei nämlich:

$$f(x) = A_0 + A_1\varphi(x) + A_2\varphi(x)^2 + \ldots + A_n\varphi(x)^n + U \ldots (1)$$

worin U jener Restausdruck ist.

Differentiirt man diese Gleichung nach x und dividirt sie dann durch $\varphi'(x)$, wo $\varphi'(x)$ nach der Lagrange'schen Bezeichnungsart den ersten Differentialquotienten von $\varphi(x)$ vorstellt, so erhält man:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A_1 + 2A_2\varphi(x) + 3A_3\varphi(x)^2 + \ldots + nA_n\varphi(x)^{n-1} + \frac{U'}{\varphi'(x)}$$

Differentiirt man auch diese Gleichung und dividirt sie dann ebenfalls durch $\varphi'(x)$, so folgt weiter:

$$\frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \frac{d\,\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{dx} =$$

$$2A_2 + 2.3A_3\,\varphi(x) + \ldots n(n-1)A_n\,\varphi(x)^{n-1} + \frac{1}{\varphi'(x)}\;\frac{d\,.\,\frac{U'}{\varphi'(x)}}{dx}$$

und wenn man so fortfährt, bis die rechte Seite mit A_n als erstem Gliede anfängt, so wird man, wie leicht zu sehen, die Gleichung haben:

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)} \cdot d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \cdot \cdot \frac{1}{\varphi'(x)} \cdot d \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}} =$$

$$1.2.3 \ldots nA_n + \frac{\frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \cdot \cdot \frac{1}{\varphi'(x)} d \cdot \frac{U'}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}} \ldots (2)$$

Um hieraus A_n, für $x = a$ unabhängig von U, bestimmen zu können, ist es nothwendig und, wie sich zeigen wird, auch hinreichend, anzunehmen, dass sowohl U selbst als auch seine n ersten Differentialquotienten für $x = a$ verschwinden, und diese Bedingung findet Statt, wenn

$$U = u\varphi(x)^{n+1}$$

gesetzt, und angenommen wird, dass weder u noch seine n ersten Differentialquotienten für $x = a$ unendlich gross werden. Denn es ist alsdann:

$$\frac{U'}{\varphi'(x)} = \varphi(x)^n \left[u' \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} + (n+1)\, u\right]$$

und man erkennt auf der Stelle, dass, wenn noch $n - 1$ Differentiationen in der durch die Gleichung (2) angedeuteten Weise vorgenommen werden, jedes Glied des Resultates den Factor $\varphi\,(x)$ mindestens in der ersten Potenz enthalten wird, dass dasselbe also in der That verschwindet, wenn $x = a$ gesetzt wird. Hiernach erhält man nun:

$$A_n = \frac{1}{1.2.3 \ldots n} \left[\frac{\frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \cdot \cdot \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}}\right]_{x=a}$$

Es ist klar, dass, wenn man die Reihe, ohne Berücksichtigung des Restes, in's Unendliche fortlaufend gedacht hätte, für A_n ganz derselbe Ausdruck erhalten worden wäre.

2.

Aus der Vergleichung des soeben für A_n abgeleiteten Ausdruckes mit dem gewöhnlichen ergibt sich zunächst, dass, wenn $\varphi(x)$ eine Function von der Beschaffenheit ist, dass die Gleichung $\varphi(x) = 0$ nur die einfache Wurzel $x = a$ zulässt, und wenn nach Ausführung aller Differentiationen durchgehends $x = a$ gesetzt wird, die Gleichung:

$$\frac{d^{n-1}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n f'(x)\right]}{dx^{n-1}} = \frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)} \cdots \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, .\, \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}}$$

stattfindet.

In Bezug auf die wirkliche Berechnung des Coëfficienten A dürfte die am Schlusse des vorigen Artikels gefundene Formel in den meisten Fällen der dem Anscheine nach kürzeren und einfacher zu handhabenden Formel von Bürmann vorzuziehen sein. Die erstere gibt nämlich kein Glied mehr und keines weniger als zur Bildung des Coëfficienten geradezu nöthig ist und liefert diesen nach ausgeführter Differentiation in seiner, im Allgemeinen einfachsten Form, während der gewöhnliche Ausdruck, nachdem alle Differentiationen ausgeführt sind, immer noch eine wesentliche Reduction durch gegenseitiges Aufheben von Gliedern zulässt, ja fast in allen Fällen eine solche nothwendig macht, indem sich nach Einsetzung des besonderen Werthes $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ einstellt. Dieser Umstand scheint um so mehr Berücksichtigung zu verdienen, als die oben entwickelte Form, wie man bemerkt haben wird, sich auf die natürlichste und einfachste Art herleiten lässt. Sie hat aber zugleich noch den weitern Vortheil, dass sie sich zur Bestimmung des Restes U leicht verwenden lässt, wie ich nun zeigen werde.

3.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, dass, wenn:

$$f(x) = A_0 + A_1\varphi(x) + A_2\varphi(x)^2 + \ldots + A_n\varphi(x)^n + U$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)} \cdots \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{U'}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}} =$$

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)} \cdots \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}} - 1.2.3\ldots nA_n$$

für den Rest U erhalten wird. Setzt man nun für A_n den im Artikel 2 gefundenen Ausdruck, so kann man diese Gleichung, wie leicht zu sehen, in die folgende Form bringen:

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)} \cdots \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{U'}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}} = \left[\frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)} \cdots \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}}\right]_a^x \tag{1}$$

Dieses vorausgesetzt, lässt sich nun für den Ausdruck auf der linken Seite ein anderer bezeichnen, welcher zur Bestimmung von U führt. Vor Allem ist klar, dass man für U die Form:

$$U = \int_a^x F(x, t)\, dt$$

setzen kann, welche offenbar die weiter oben vorausgesetzte Eigenschaft besitzt, für $x = a$ in Null überzugehen. Setzt man zugleich voraus, es werden sowohl $F(x, t)$ als auch alle auf x bezogenen Differentialquotienten $1, 2 \ldots n^{\text{ter}}$ Ordnung von $F(x, t)$ gleich Null, wenn $t = x$ gesetzt wird, so hat man noch:

$$\Big[F(x, t)\Big]_x = 0\,, \quad \left[\frac{dF(x,t)}{dx}\right]_x = 0 \;.\;.\;.\;.\; \left[\frac{d^{n-1}F(x,t)}{dx^{n-1}}\right]_x = 0$$

und wenn man nun die Function:

$$U = \int_a^x F(x, t)\, dt$$

nach den bekannten Regeln differentiirt, so erfolgt:

$$U' = \Big[F(x,t)\Big]_x + \int_a^x \frac{dF(x,t)}{dx}\, dt$$

oder also:

$$U' = \int_a^x \frac{dF(x,t)}{dx}\, dt$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\varphi'(x)$ und differentiirt darauf abermals nach x, so findet man:

$$\frac{d\,\frac{U'}{\varphi'(x)}}{dx} = \left[\frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \frac{dF(x,t)}{dx}\right]_x + \int_a^x \frac{d\,.\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,\frac{dF(x,t)}{dx}}{dx}\,dt$$

und durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens:

$$\frac{d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{U'}{\varphi'(x)}}{dx^2} = \int_a^x \frac{d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,\frac{dF(x,t)}{dx}}{dx^2}\,dt$$

Es ist für sich klar, dass man auf diese Art weiter gehen kann und nach $n-1$ maliger Wiederholung die folgende Gleichung erhalten wird:

$$\frac{\frac{1}{\varphi_{\prime}(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,.\,.\,.\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,.\,d\,\frac{U'}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}} =$$

$$\int_a^x \frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,.\,.\,.\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,.\,\frac{dF(x,t)}{dx}}{dx^{n-1}}\,dt$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (1), so ergibt sich:

$$\int_a^x \frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,.\,.\,.\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,.\,\frac{dF(x,t)}{dx}}{dx^{n-1}}\,dt =$$

$$\left[\frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,.\,.\,.\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}}\right]_a^x$$

Es kommt nun darauf an, die dieser Gleichung genügende Form der Function $F(x,t)$ zu finden. Den Bedingungen, welche oben für dieselbe aufgestellt worden sind, wird vorerst entsprochen, wenn man

$$F(x,t) = [\varphi(x) - \varphi(t)]^n\,\psi(t)$$

setzt, weil alsdann die $n-1$ ersten Differentialquotienten nach x in der That verschwinden, sobald man nach geschehener Differentiation $t = x$ setzt. Ferner lässt sich alsdann der Ausdruck unter dem Integralzeichen leicht entwickeln, und findet man:

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)} \cdots \frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \frac{dF(x,t)}{dx}}{dx^{n-1}} = 1.2.3\ldots n.\psi(t)$$

so dass nunmehr zur näheren Bestimmung der Function $\psi(t)$ die Gleichung:

$$1.2.3\ldots n \int_a^x \psi(t)\, dt = \left[\frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)} \cdots \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}}\right]_a^x$$

übrig bleibt. Diese lässt aber nicht lange in Zweifel, welche Form für $\psi(t)$ anzunehmen ist; offenbar muss man setzen:

$$\psi(t) = \frac{1}{1.2.3..n} \cdot \frac{d\, \frac{1}{\varphi'(t)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(t)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(t)} \cdots \frac{1}{\varphi'(t)}\, d\, \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}}{dt^n}$$

um jener Bedingungsgleichung identisch zu genügen.

4.

Durch die im Vorhergehenden erlangten Resultate ist nunmehr die Aufgabe gelöst, da durch sie sowohl die Coëfficienten als auch der Rest der Reihe bestimmt sind.

Theorem. Wenn die Function $\varphi(x)$ für $x = a$ verschwindet, und wenn:

$$f(x) = A_0 + A_1\varphi(x) + A_2\varphi(x)^2 + \ldots + A_n\varphi(x)^n + U$$

gesetzt wird, so ist:

$$A_0 = f(a)$$

$$A_n = \frac{1}{1.2.3..n}\left[\frac{\frac{1}{\varphi_{,}(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)} \cdots \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}}\right]_a$$

und

$$U = \frac{1}{1.2.3..n}\int_a^x [\varphi(x) - \varphi(t)]^n \, \frac{d\frac{1}{\varphi'(t)}\, d\frac{1}{\varphi'(t)} \cdots \frac{1}{\varphi'(t)}\, d\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}}{dt^n}\, dt$$

Um eines besondern Falles zu erwähnen, nehme man an, es sei:

$$\varphi(x) = x - a.$$

so ist:

$$\varphi'(t) = \varphi'(x) = 1$$

und man hat:

$$A_n = \frac{1}{1.2.3..n} f_{(a)}^{(n)} \; ; \; U = \frac{1}{1.2.3..n} \int_a^x (x-t)^n f_{(t)}^{(n+1)} dt,$$

so dass man die Entwickelung findet:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots$$
$$+ \frac{(x-a)^n}{1.2.3..n} f_{(a)}^{(n)} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{1.2.3...n} f_{(t)}^{(n+1)} dt,$$

aus welcher, wenn man $x - a = y$, also $x = a + y$ setzt, die Formel:

$$f(a+y) = f(a) + yf'(a) + \frac{y^2}{1.2} f''(a) + \dots$$
$$+ \frac{y^n}{1.2..n} f^n(a) + \int_a^{a+y} \frac{(a+y-t)^n f^{(n+1)}(t)}{1.2.3..n} dt$$

sich ergibt.

Ich bemerke nur noch, dass sich das den Rest darstellende Integral auch in der üblichen Form:

$$\frac{1}{1.2.3..n} \int_0^y (y-t)^n f^{n+1}(a+t)\, dt$$

darstellen lässt.

5.

Die folgenden Erörterungen beziehen sich auf die Lösung der wesentlich allgemeineren Aufgabe: Eine Function $f(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen nach Potenzen zweier Functionen $\varphi(x)$, $\psi(y)$ dieser Veränderlichen zu entwickeln. — Ich setze dabei voraus, es seien $x = a$ und $y = b$ zwei endliche und reelle Werthe, wofür die Functionen $\varphi(x)$, $\psi(y)$ verschieden, für welche also

$$\varphi(a) = 0 \quad , \quad \psi(b) = 0.$$

Die verlangte Entwickelung wird im Allgemeinen die Potenzen der beiden Functionen, sowie auch deren Producte enthalten; wenn man daher die entsprechende Doppelreihe mit den Gliedern abbricht, welche die Potenzen $\varphi(x)^m$ und $\psi(y)^n$ enthalten, und wenn man die Summe der übrigen Glieder, oder also den Rest der Reihe durch U bezeichnet, so muss

$$f(x,y) = \sum_{0}^{n}\sum_{0}^{m} P_{m,n}\, \varphi(x)^m\, \psi(y)^n + U$$

oder also, in vollständig entwickelter Form:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & \\ & P_{0,0} + P_{0,1}\,\psi(y) + P_{0,2}\,\psi(y)^2 + \cdot\cdot + P_{0,n}\,\psi(y)^n \\ + \varphi(x) & \left[P_{1,0} + P_{1,1}\,\psi(y) + P_{1,2}\,\psi(y)^2 + \cdot\cdot + P_{1,n}\,\psi(y)^n\right] \\ + \varphi(x)^2 & \left[P_{2,0} + P_{2,1}\,\psi(y) + P_{2,2}\,\psi(y)^2 + \cdot\cdot + P_{2,n}\,\psi(y)^n\right] \\ + & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \varphi(x)^m & \left[P_{m,0} + P_{m,1}\,\psi(y) + P_{m,2}\,\psi(y)^2 + \cdot\cdot + P_{m,n}\,\psi(y)^n\right] + U \end{aligned}$$

angenommen werden.

Zur Bestimmung des Coëfficienten P lässt sich eine Formel finden, welche der betreffenden für die Bürmann'sche Reihe analog ist, und auf die folgende Art sich ergibt. Man gebe der Entwickelung zuerst die Gestalt:

$$f(x,y) = Q_0 + Q_1\,\varphi(x) + Q_2\,\varphi(x)^2 + \ldots + Q_m\,\varphi(x)^m + U,$$

worin die Bedeutung der Coëfficienten Q_0, $Q_1 \ldots . Q_m$ für sich klar ist, und woraus man nach der gewöhnlichen Form der Bürmann'schen Reihe findet:

$$Q_m = \frac{1}{1.2.3\,..\,m} \cdot \frac{d^{m-1}\left[\left(\dfrac{x-a}{\varphi(x)}\right)^m \dfrac{df(x,y)}{dx}\right]}{dx^{m-1}} \text{ für } x = a.$$

Da aber:

$$Q_m = P_{m,0} + P_{m,1}\,\psi(y) + P_{m,2}\,\psi(y)^2 + \ldots + P_{m,n}\,\psi(y)^n$$

so hat man nach derselben Formel:

$$P_{m,n} = \frac{1}{1.2.3..n}\,\frac{d^{n-1}\left[\left(\frac{y-b}{\psi(y)}\right)^n \frac{dQ_m}{dy}\right]}{dy^{n-1}} \text{ für } y = b,$$

folglich, wenn man für Q_m den oben gefundenen Ausdruck setzt:

$$P_{m,n} = \frac{1}{1.2.3..m.1.2.3..n}\cdot\frac{d^{m+n-2}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^m \left(\frac{y-b}{\psi(y)}\right)^n \frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}\right]}{dx^{m-1}\,dy^{n-1}}$$

für $x = a$, $y = b$,

womit die Coëfficienten bestimmt sind.

Man kann übrigens noch einen andern Weg einschlagen, auf welchem man den Coëfficienten $P_{m,n}$ in einer scheinbar verwickeltern, für die wirkliche Berechnung aber meist bequemeren Form und zugleich auch den Restausdruck U erhält.

6.

Wenn man die im vorigen Artikel vollständig beschriebene Entwickelung einmal nach x partiell differentiirt, dann durch $\varphi'(x)$ dividirt, wenn dies geschehen, wieder partiell nach x differentiirt und dann wieder durch $\varphi'(x)$ dividirt, und so fort dasselbe Verfahren $m-1$ mal wiederholt, so wird man haben:

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\ldots\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,.\,\frac{\frac{df(x,y)}{dx}}{\varphi'(x)}}{dx^{m-1}} =$$

$$1.2.3..m\left[P_{m,0} + P_{m,1}\,\psi(y) + P_{m,2}\,\psi(y)^2 + \ldots + P_{m,n}\,\psi(y)^n\right]$$

$$+\,\frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\ldots\frac{1}{\varphi'(x)}\,.\,d\,\frac{\frac{dU}{dx}}{\varphi'(x)}}{dx^{m-1}}$$

Wendet man dasselbe Verfahren auch auf diese Gleichung an, indem man jetzt partiell nach y differentiirt und jenes Verfahren $n-1$ mal wiederholt, so gelangt man zu der Gleichung:

$$1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n\,.\,P_{m,n} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{\varphi'(x)\,\psi'(y)}\,d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\ldots d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\,.\,d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\,d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\ldots d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\,.\,\dfrac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}}{dx^{m-1}\,dy^{n-1}}$$

für $x = a$, $y = b$,

indem sämmtliche Coëfficienten so bestimmt werden, dass der Ausdruck:

$$\frac{\dfrac{1}{\varphi'(x)\,\psi'(y)}\,d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\ldots d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\,.\,d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\,d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\ldots d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\,.\,\dfrac{d^2 U}{dx\,dy}}{dx^{m-1}\,dy^{n-1}}$$

für $x = a$, $y = b$

verschwindet. Wie sich zeigen wird, erhält U in der That eine Form, durch welche diese Bedingung erfüllt wird.

7.

Zur Bestimmung des Restes U, womit ich mich nun beschäftigen werde, hat man, dem Vorhergehenden zufolge, die Gleichung:

$$\frac{\dfrac{1}{\varphi'(x)\,\psi'(y)}\,d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\ldots d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\,d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\ldots d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\,\dfrac{d^2 U}{dx\,dy}}{dx^{m-1}\,dy^{n-1}} =$$

$$\left[\frac{\dfrac{1}{\varphi'(x)\,\psi'(y)}\,d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\ldots d\,\dfrac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\,d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\ldots d\,\dfrac{1}{\psi'(y)}\,.\,\dfrac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}}{dx^{m-1}\,dy^{n-1}}\right]_{x=a,\,y=b}^{x=x,\,y=y}$$

Man kann aber, um U zu finden, auch einen mehr directen Weg einschlagen, der, als der kürzere, vorzuziehen ist; die soeben angeführte Gleichung lässt sich dann zur Prüfung des Resultates benutzen. Zu dem Ende denke man sich, die Reihe sei in die Form gebracht:

$$f(x,y) = R_0 + R_1\varphi(x) + R_2\varphi(x)^2 + \ldots + R_m\varphi(x)^m + u,$$

wobei R_0, R_1, R_2, ... R_m nicht blos die bis zur Potenz $\psi(y)^n$ fortgesetzten Entwickelungen, sondern die vollständigen Werthe der Coëfficienten, in unentwickelter Form darstellen, und u der dieser Bestimmung entsprechende Rest der Reihe ist. Unter dieser Voraussetzung hat man, dem Vorhergehenden zufolge:

$$R_m = \frac{1}{1.2.3\,..\,m}\left[\frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,.\;.\;.\,d\,\frac{1}{\varphi'(x)}\,\frac{df(x,y)}{dx}}{dx^{m-1}}\right]_{x=a}$$

$$u = \frac{1}{1.2.3\,..\,m}\int_a^x [\varphi(x)-\varphi(t)]^m \;.\; \frac{d\,\frac{1}{\varphi'(t)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(t)}\,.\;.\;.\,d\,\frac{f'(t,y)}{\varphi'(t)}}{dt^m}\,dt$$

Statt dieses vollständigen Werthes R_m gehen aber blos die n ersten Glieder seiner Entwickelung nach Potenzen von $\psi(y)$ ein, so dass an die Stelle von

$$R_0,\; R_1,\; R_2 \;.\;.\;.\;.\;.\; R_m$$

blos die Werthe treten, welche aus:

$$P_{m,0} + P_{m,1}\psi(y) + P_{m,2}\psi(y)^2 + \;.\;.\;.\; + P_{m,n}\,\psi(y)^n$$

hervorgehen, wenn man darin $m = 0, 1, 2, 3, \ldots m$ setzt. Setzt man daher:

$$R_m = P_{m,0} + P_{m,1}\psi(y) + P_{m,2}\psi(y)^2 + \ldots + P_{m,n}\psi(y)^n + v_m,$$

so besteht der Rest U in einer Summe von Gliedern, welche durch die Gleichung:

$$U = u + v_0 + v_1\,\varphi(x) + v_2\,\varphi(x)^2 + \ldots + v_m\,\varphi(x)^m$$

gegeben ist.

Nun ist aber, ebenfalls nach den früheren Ergebnissen:

$$v_m = \frac{1}{1.2.3\,..\,n}\int_b^y [\psi(y)-\psi(s)]^n\,\frac{d\,\frac{1}{\psi'(s)}\,d\,\frac{1}{\psi'(s)}\,..\,d\,\frac{1}{\psi'(s)}\,.\,\frac{dRm}{ds}}{ds^n}\,ds$$

oder, wenn man den oben angegebenen Werth von R_m, nachdem darin s für y gesetzt worden ist, substituirt, und zur Abkürzung $1.2.3\,..\,n = n!$ setzt:

$$m!\;n!\;v_m =$$

$$\int_b^y [\psi(y-\psi(s)]^n.\,\frac{d\,\frac{1}{\psi'(s)}\,d\,\frac{1}{\psi'(s)}\,..\,d\,\frac{1}{\psi'(s)}\,\frac{1}{\varphi'(t)}\,d\,\frac{1}{\varphi'(t)}\,..\,d\,\frac{1}{\varphi'(t)}\,\frac{d^2f(t,s)}{dt\,ds}}{ds^n\,dt^{m-1}}\,ds$$

für $t = a$.

Da aber:

$$U = u +$$

$$\frac{1}{n!}\int_b^y [\psi(y)-\psi(s)]^n \frac{d\frac{1}{\psi'(s)}\,d\frac{1}{\psi'(s)}\cdots d\frac{1}{\psi'(s)}\,\frac{d(R_0+R_1\varphi(x)+\cdot+R_m\varphi(x)^m)}{ds}}{ds^n}\,ds$$

und da weiter:

$$R_0 + R_1\varphi(x) + R_2\varphi(x)^2 + \,\cdot\,\cdot + R_m\,\varphi(x)^m = f(x,s) - u,$$

so folgt:

$$U = u + \frac{1}{n!}\int_b^y [\psi(y) - \psi(s)]^n \cdot \frac{d\frac{1}{\psi'(s)}\,d\frac{1}{\psi'(s)}\cdots d\frac{1}{\psi'(s)}\,\frac{df(x,s)}{ds}}{ds^n}\,ds$$

$$-\frac{1}{n!}\int_b^y [\psi(y) - \psi(s)]^n \cdot \frac{d\frac{1}{\psi'(s)}\,d\frac{1}{\psi'(s)}\cdots d\frac{1}{\psi'(s)}\,\frac{du}{ds}}{ds^n}\,ds.$$

Bemerkt man ferner noch, dass aus dem, oben für u gefundenen Ausdruck, wenn man auch darin s für y setzt, und also u als Function von s darstellt, die Gleichung:

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{m!}\int_a^x [\varphi(x) - \varphi(t)]^m \cdot \frac{d\frac{1}{\varphi'(t)}\,d\frac{1}{\varphi'(t)}\cdots d\frac{1}{\varphi'(t)}\,\frac{d^2f(t,s)}{dt\,ds}}{dt^m}\,dt$$

sich ergibt, so lassen sich, wie man sieht, die drei Bestandtheile von U insgesammt durch die ursprünglich gegebenen Functionen ausdrücken, und erhält U die weiter unten folgende Form. Durch die Ermittelung der Coëfficienten und die Bestimmung des Restes der Doppelreihe ist die Aufgabe des Artikel 5 gelöst. Die Resultate lassen sich, wie folgt, zusammenfassen.

8.

Theorem. Wenn die Function $\varphi(x)$ für $x = a$, und $\psi(y)$ für $y = b$ verschwindet, und wenn:

$$f(x,y) = \sum_0^n \sum_0^m P_{m,n}\, \varphi(x)^m\, \psi(y)^n + U$$

gesetzt wird, so ist:

$$P_{(0,0)} = f(a,b)$$

$$P_{(m,n)} = \frac{1}{m!\,n!} \frac{d^{m+n-2}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^m \left(\frac{y-b}{\psi(y)}\right)^n \frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}\right]}{dx^{m-1}\,dy^{n-1}} \text{ für } x=a,\ y=b$$

sowie auch in anderer Form:

$$m!\,n!\,P_{m,n} =$$

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)\psi'(y)}\, d\frac{1}{\varphi'(x)}\, d\frac{1}{\varphi'(x)} \;.\;.\; d\frac{1}{\varphi'(x)}\, d\frac{1}{\psi'(y)}\, d\frac{1}{\psi'(y)} \;.\;.\; d\frac{1}{\psi'(y)}\, \frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}}{dx^{m-1}\,dy^{n-1}}$$

für $x = a$, $y = b$.

Für den Rest der Entwickelung hat man:

$$U =$$

$$+\frac{1}{m!}\int_a^x [\varphi(x)-\varphi(t)]^m \frac{d\frac{1}{\varphi'(t)}\, d\frac{1}{\varphi'(t)} \;.\;.\;.\; d\frac{1}{\varphi'(t)}\, \frac{df(t,y)}{dt}}{dt^m}\, dt$$

$$-\frac{1}{m!\,n!}\int_a^x dt \int_b^y \left[\begin{array}{c}[\varphi(x)-\varphi(t)]^m [\psi(y)-\psi(s)]^n \times \\ \frac{d\frac{1}{\varphi'(t)} \ldots d\frac{1}{\varphi'(t)}\, d\frac{1}{\psi'(s)} \ldots d\frac{1}{\psi'(s)} \,.\, \frac{d^2 f(t,s)}{dt\,ds}}{dt^m\,ds^n}\end{array}\right] ds$$

$$+\frac{1}{n!}\int_b^y [\psi(y)-\psi(s)]^n \frac{d\frac{1}{\psi'(s)}\, d\frac{1}{\psi'(s)} \;.\;.\;.\; d\frac{1}{\psi'(s)} \,.\, \frac{df(x,s)}{ds}}{ds^n}\, ds$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass dieser Satz so wie auch die ihm zu Grunde liegende Betrachtung sich ohne weitere Schwierigkeiten auf Functionen von mehr als zwei unabhängigen

Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ausdehnen lässt, was ich jedoch nicht weiter verfolgen werde.

Im Eingange des vorigen Artikels wurde bemerkt, dass die daselbst für U angeführte Bedingungsgleichung zur Verification des bereits erhaltenen Restausdruckes verwendet werden könne. Um dies noch näher zu zeigen, sei der Kürze wegen:

$$F_{(x,y)} =$$

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)\psi'(y)} d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\varphi'(x)} \ldots d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\psi'(y)} d \frac{1}{\psi'(y)} \ldots d \frac{1}{\psi'(y)} \cdot \frac{d^2 f(x\,y)}{dx\,dy}}{dx^{m-1}\,dy^{n-1}}$$

dann erscheint jene Bedingungsgleichung in der Form:

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)\psi'(y)} d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\varphi'(x)} \ldots d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\psi'(y)} d \frac{1}{\psi'(y)} \ldots d \frac{1}{\psi'(y)} \frac{d^2 U}{dx\,dy}}{dx^{m-1}\,dy^{n-1}}$$

$$= F(x,y) - F(a,b).$$

Substituirt man nun für U die soeben gefundenen drei Ausdrücke und führt die Rechnung, soweit diese die vorgeschriebenen Differentiationen betrifft, wirklich aus, so ergibt sich die Gleichung:

$$\int_a^x \frac{dF\,(t,y)}{dt}\,dt - \int_a^x dt \int_b^y \frac{d^2F(t,s)}{dt\,ds}\,ds + \int_b^y \frac{dF(x,s)}{sd}\,ds$$

$$= F(x,y) - F(a,b).$$

Durch die Ausführung der Integrationen erhält man auf der linken Seite die Ausdrücke:

$$[F(x,y) - F(a,y)] - \int_a^x dt \left[\frac{d\,F\,(t,y)}{dt} - \frac{d\,F\,(t,b)}{dt}\right] + [F(x,y) - F(x,b)]$$

oder auch:

$$2F(x,y) - F(a,y) - F(x,b) - F(x,y) + F(a,y) + F(x,b) - F(a,b)$$

was sich, wie man sieht, auf

$$F(x,y) - F(a,b)$$

reducirt, wie es der obigen Bedingungsgleichung gemäss sein soll.

9.

Um einige Anwendungen des vorhin bewiesenen Satzes zu zeigen, will ich zunächst annehmen, es sei:

$$\varphi(x) = x \quad , \quad \psi(y) = y.$$

so wird sich die Maclaurin'sche Entwickelung für Functionen zweier Veränderlichen mit dem Restausdrucke ergeben. Da nämlich für jene Annahme:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \varphi'(x) = 1, \quad \psi'(y) = 1,$$

so erhält man unmittelbar:

$$P_{m,n} = \frac{1}{m!\,n!}\left[\frac{d^{m+n}f(x,y)}{dx^m\,dy^n}\right]_{x=0,\,y=0}$$

$$f(x,y) = \sum_0^n\sum_0^m \frac{df^{m+n}(x,y)}{dx^m\,dy^n}\,\frac{x^m\,y^n}{m!\,n!} + U$$

$$U = \frac{1}{m!}\int_0^x (x-s)^m \frac{d^{m+n}f(s,y)}{ds^{m+1}}\,ds$$

$$-\frac{1}{m!\,n!}\int_0^x ds\int_0^y (x-s)^m\,(y-t)^n\,\frac{d^{m+n+2}f(s,t)}{ds^{m+1}\,dt^{n+1}}\,dt$$

$$+\frac{1}{n!}\int_0^y (y-t)^n\,\frac{d^{n+1}f(x,t)}{dt^{n+1}}\,dt.$$

Soviel mir bekannt, ist auch diese Restformel neu. Zwar theilt Cournot im ersten Bande, p. 273, seines Werkes: *Traité élém. de la théorie des fonctions*, einen Restausdruck der Maclaurinschen Reihe für zwei Veränderliche mit, derselbe ist aber von dem obigen wesentlich verschieden, und bezieht sich auf eine andere Begrenzung der Doppelreihe als die oben vorausgesetzte.

10.

Als zweiten besonderen Fall will ich annehmen, die Function $f(x, y)$ sei eine nach x und y symmetrische und daher

$$f(x,y) = f(y,x).$$

Zugleich nehme ich die beiden Functionen φ und ψ als der Form nach identisch an, so dass: $\varphi(x) = \psi(x)$ und also die Reihenentwickelung nach Potenzen von $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ fortschreitet. Es ist eine nothwendige Folge dieser Annahmen, dass auch der Coëfficient $P_{m,n}$ symmetrisch nach den Zeigern m und n sein muss und dass also

$$P_{m,n} = P_{n,m},$$

wobei dieser Coëfficient gegeben ist durch die Gleichung:

$$P_{m,n} =$$

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)\psi'(y)} d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\varphi'(x)} \dots d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\varphi'(y)} d \frac{1}{\varphi'(y)} \dots d \frac{1}{\varphi'(y)} \cdot \frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}}{m!\, n!\, dx^{m-1}\, dy^{n-1}}$$

für $x = a$, $y = a$.

In Folge der bezeichneten Annahmen wird zugleich die Doppelreihe beträchtlich einfacher als im allgemeinsten Fall; sie lässt sich explicite wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{llll}
f(x,y) = & [P_{0,0} + (\varphi(x) + \varphi(y) & P_{0,1} & + \\
& \quad + (\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2) & P_{0,2} & + \dots] \\
+ \varphi(x)\ \varphi(y) & [P_{1,1} + (\varphi(x) + \varphi(y) & P_{1,2} & + \\
& \quad + (\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2) & P_{1,3} & + \dots] \\
+ \varphi(x)^2\ \varphi(y)^2 & [P_{2,2} + (\varphi(x) + \varphi(y) & P_{2,3} & + \\
& \quad + (\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2) & P_{2,4} & + \dots] \\
+ \dots\dots & & & \\
+ \varphi(x)^n\ \varphi(y)^n & [P_{n,n} + (\varphi(x) + \varphi(y) & P_{n,n+1} & + \\
& \quad + (\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2) & P_{n,n+2} & + \dots] \\
+ \dots\dots & & &
\end{array}$$

Hierdurch erhält zugleich die folgende, nicht unwichtige Aufgabe ihre Lösung.

Die Function $f(x+y)$ soll nicht nach Potenzen von x und y, sondern nach Potenzen von $f(x)$ und $f(y)$ selbst entwickelt werden.

Da nämlich hierbei die geforderte Symmetrie der Function $f(x,y)$ nach x und y schon vermöge des Arguments $x+y$ stattfindet und auch $\varphi(x) = f(x)$ und $\psi(y) = f(y)$ ist, so finden alle Bedingungen Statt, um die soeben angeführten Gleichungen zur Lösung dieser Aufgabe anwenden zu können, und man findet:

$$
\begin{aligned}
f(x+y) = \; & [P_{0,0} + (f(x) + f(y))\, P_{0,1} + \\
& \quad + (f(x)^2 + f(y)^2)\, P_{0,2} + \ldots] \\
& + f(x)\, f(y)\, [P_{1,1} + (f(x) + f(y))\, P_{1,2} + \\
& \quad + (f(x)^2 + f(y)^2)\, P_{1,3} + \ldots] \\
& + f(x)^2 f(y)^2 [P_{2,2} + (f(x) + f(y))\, P_{2,3} + \\
& \quad + (f(x)^2 + f(y)^2)\, P_{2,4} + \ldots] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + f(x)^n f(y)^n [P_{n,n} + (f(x) + f(y))\, P_{n,n+1} + \\
& \quad + (f(x)^2 + f(y)^2)\, P_{n,n+2} + \ldots] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

wobei

$$
P_{m,n} = \frac{\dfrac{1}{f'(x)f'(y)}\, d\, \dfrac{1}{f'(x)}\, d\, \dfrac{1}{f'(x)} \ldots d\, \dfrac{1}{f'(x)}\, d\, \dfrac{1}{f'(y)} \ldots d\, \dfrac{1}{f'(y)}\, \dfrac{d^2 f(x+y)}{dx\, dy}}{m!\, n!\, dx^{m-1}\, dy^{n-1}}
$$

für $x = a$, $y = a$

und wobei a ein Werth ist, für welchen man hat

$$f(a) = 0.$$

In anderer Darstellung ist auch

$$
P_{m,n} = \frac{d^{m+n-2}\left[\left(\dfrac{x-a}{f(x)}\right)^m \left(\dfrac{y-b}{f(y)}\right)^n \dfrac{d^2 f(x+y)}{dx\, dy}\right]}{m!\, n!\;\; dx^{m-1}\, dy^{n-1}},\; x = y = a
$$

Ebenso ist durch die Ergebnisse des vorigen Artikels auch der Rest der Reihe bestimmt.

Da hierdurch die Aufgabe im Allgemeinen vollständig gelöst ist, so füge ich nur noch die Ausdrücke bei, durch welche einige der ersten Coëfficienten jener Entwickelung unmittelbar berechnet werden können.

Dieselben sind mittelst der ersten Form von $P_{m,n}$ gefunden worden, und heissen:

$$P_{0,0} = f(2a)$$

$$P_{0,1} = \frac{f'(2a)}{f'(a)}$$

$$P_{0,2} = \frac{f'(a)f''(2a) - f'(2a)f''(a)}{2f'(a)^3}$$

$$P_{0,3} = \frac{f'(a)^2f'''(2a) - 3f'(a)f''(a)f''(2a) + 3f'(2a)f''(a)^2 - f'(a)f'(2a)f'''(a)}{6f'(a)^5}$$

$$P_{1,1} = \frac{f''(2a)}{f'(a)^2}$$

$$P_{1,2} = \frac{f'(a)f'''(2a) - f''(a)f''(2a)}{2f'(a)^4}$$

$$P_{1,3} = \frac{f'(a)^2f^{\mathrm{IV}}(2a) - 3f'(a)f''(a)f'''(2a) + 3f''(2a)f''(a)^2 - f'(a)f''(2a)f'''(a)}{6f'(a)^6}$$

$$P_{2,2} = \frac{f'(a)^2f^{\mathrm{IV}}(2a) - 2f'(a)f''(a)f'''(2a) + f''(2a)f''(a)^2}{4f'(a)^6}$$

wobei $f'(2a)$, $f''(2a)$, $f'''(2a)$, ... die Werthe resp. von $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... bezeichnen, welche sich ergeben, wenn man nach ausgeführter Differentiation $x = 2a$ setzt.

11.

Die Ausführung einiger besonderen Fälle wird die Anwendung der so eben erhaltenen Resultate näher bezeichnen.

Ich will zunächst annehmen, es handle sich darum,

$$f(x + y) = \log(x + y)$$

nach Potenzen von log x und log y zu entwickeln. Man erhält dann aus den früheren Formeln, da:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \; f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \; f'''(x) = +\frac{2}{x^3}, \; f^{IV}(x) = -\frac{2.3}{x^4}$$

und $a = 1$ ist, für die Coëfficienten die folgenden Werthe:

$$\begin{array}{lll} P_{0,0} = \log 2 \;, & P_{1,1} = -\frac{1}{4} \;, & P_{2,2} = -\frac{1}{32} \\ P_{0,1} = \frac{1}{2} \;, & P_{1,2} = 0 & \\ P_{0,2} = \frac{1}{8} \;, & P_{1,3} = \frac{1}{48} & \\ P_{0,3} = 0 & & \\ P_{0,4} = -\frac{1}{192} & & \end{array}$$

Die verlangte Reihe, bis zu den Gliedern vierter Ordnung incl. ausgedehnt, heisst also:

$$\log(x+y) =$$

$$\lg 2 + \frac{1}{2}[\lg x + \lg y] + \frac{1}{8}[(\lg x)^2 + (\lg y)^2] - \frac{1}{192}[(\lg x)^4 + (\lg y)^4] + \cdots$$

$$-\frac{1}{4}\log x \log y + \frac{1}{48}[(\log x)^2 + (\log y)^2] \log x \log y + \ldots$$

$$-\frac{1}{32}(\log x)^2 (\log y)^2 + \ldots$$

oder in etwas kürzerer Darstellung:

$$\log(x+y) =$$

$$\log 2 + \frac{1}{2}[\log x + \log y] + \frac{1}{8}[\log x - \log y]^2 \left[1 + \frac{1}{6}\log x \log y\right]$$

$$-\frac{1}{192}[(\log x)^2 - (\log y)^2]^2 + \ldots.$$

Für $y = 1$ folgt hieraus:

$$\log(1+x) = \log 2 + \frac{\log x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\log x}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{\log x}{2}\right)^4 + \ldots.$$

wie man auch mittelst der Bürmann'schen Reihe finden würde.

Nimmt man weiter an, es solle:

$$f(x+y) = \sin(x+y)$$

nach Potenzen von $\sin x$ und $\sin y$ entwickelt werden, so ist hierfür $a = 0$ zu setzen und erhält man allgemein:

$$f^{(4n)}(0) = 0, f^{(4n+1)}(0) = +1 . f^{(4n+2)}(0) = 0 , f^{(4n+3)}(0) = -1,$$

so dass in diesem Falle

$$P_{0,0} = 0, \; P_{0,1} = 1 \quad , P_{0,2} = 0, \; P_{0,3} = 0 \quad , P_{0,4} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$P_{1,1} = 0, \; P_{1,2} = -\frac{1}{2}, \; P_{1,3} = 0, \; P_{1,4} = -\frac{1}{2.4}, \; P_{1,4} = -\frac{1.3}{2.4.6} \ldots$$

Für alle übrigen Coëfficienten erhält man den Werth Null, so dass sich die folgende Reihe ergibt:

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y - \sin x \sin y \left[\frac{1}{2} (\sin x + \sin y) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2.4} (\sin^3 x + \sin^3 y) + \frac{1.3}{2.4.6} (\sin^5 x + \sin^5 y) + \ldots \right]$$

Diese Gleichung, welche auch auf anderm Wege leicht erhalten werden könnte, findet, wie bekannt, u. a. bei Entwickelung dioptrischer Reihen ihre Anwendung.

12.

Sowohl von der Bürmann'schen als der nach Potenzen zweier Functionen fortschreitenden Entwickelung lassen sich Anwendungen auf die Transformation gegebener Reihen machen. Um einige hierher gehörige Fälle zu betrachten, nehme man zunächst an, es handle sich darum, eine gegebene Reihe:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots$$

in eine andere zu verwandeln, welche die Form hat:

$$F(x) = f(x) \left[A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 \varphi(x)^2 + \ldots + A_n \varphi(x)^n + \ldots \right]$$

und worin $f(x)$ und $\varphi(x)$ ebenfalls gegebene Functionen sind. Was nun zunächst die Coëfficienten A betrifft, so hat man hierfür nach Art. 1 die Gleichung:

$$A_n = \frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)} \cdots \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{F(x)}{f(x)}}{n!\, dx^n} \text{ für } x = a.$$

Wenn $\varphi(x) = x$, also $\varphi'(x) = 1$, sodann zur Abkürzung

$$\frac{1}{f(x)} = \theta(x)$$

gesetzt wird, so ist einfacher:

$$A_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n \cdot [F(x)\, \theta(x)]}{dx^n} \text{ für } x = 0$$

oder also, wenn man die Differentiation, so weit es im Allgemeinen geschehen kann, wirklich ausführt:

$$A_n = \frac{a_0 \theta^n(0)}{n!} + \frac{a_1 \theta^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{a_2 \theta^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} + \cdots + \frac{a_{n-1} \theta^1(0)}{1!} + a_n \theta_{(0)}$$

wobei zu bemerken, dass $A_0 = a_0\, \theta_{(0)}$ ist.

Um einen besondern Fall zu betrachten, will ich annehmen, es sei die Reihe:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

in eine andere zu verwandeln, welche die Form

$$F(x) = e^x (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots)$$

hat. Da hierbei $\theta(x) = e^{-x}$, so ergibt sich:

$$\theta(0) = 1,\ \theta^{(1)}(0) = -1,\ \theta^{(2)}(0) = +1;\ \ldots \theta^{(n)}(0) = (-1)^n$$

so dass man allgemein hat:

$$A_n = a_n - \frac{a_{n-1}}{1!} + \frac{a_{n-2}}{2!} - \frac{a_{n-3}}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} a_1}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n a_0}{n!}$$

Angenommen z. B., die gegebene Reihe habe die folgenden Coëfficienten:

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{\alpha}{\beta},\ a_2 = \frac{1}{1.2} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}, \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}$$

dann folgt aus den Gleichungen:

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = a_1 - a_0 = -\frac{\beta - a}{1}$$

$$A_2 = a_2 - \frac{a_1}{1} + \frac{a_0}{1.2} = \frac{(\beta - a)(\beta - a + 1)}{1.2.\beta(\beta + 1)}$$

. . . .

$$A_n = a_n - \frac{a_{n-1}}{1!} + \ldots + \frac{(-1)^n a_0}{n!}$$

$$= \frac{(\beta - a)(\beta - a + 1)(\beta - a + 2)\ldots(\beta - a + n - 1)}{n!\beta(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + n - 1)}(-1)^n$$

und es ist die verlangte Transformation:

$$1 + \frac{a}{\beta}\frac{x}{1} + \frac{a(a+1)}{\beta(\beta+1)} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots =$$

$$e^x \left\{ 1 - \frac{\beta - a}{\beta}\frac{x}{1} + \frac{(\beta - a)(\beta - a + 1)}{\beta(\beta+1)}\frac{x^2}{1.2} - \frac{(\beta - a)(\beta - a + 1)(\beta - a + 2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \right\}$$

oder, wenn man die gegebene Reihe mit $F(a, \beta, x)$ bezeichnet, so folgt:

$$F(a, \beta, x) = e^x F(\beta - a, \beta, -x)$$

wie auf anderm Wege Kummer in der Abhandlung: *De integral. definitis* (Journal von Crelle, Bd. 17) fand.

13.

Die Bestimmung der Coëfficienten der Reihen, von welchen bisher die Rede war, lässt sich in manchen Fällen vereinfachen, wenn die zu entwickelnde Function in Form eines einfachen oder doppelten bestimmten Integrals dargestellt werden kann. Ist $f(x)$ die nach Potenzen von $\varphi(x)$ zu entwickelnde Function durch die Gleichung:

$$f(x) = \int_a^\beta F\big(s, \varphi(x)\big)\, ds$$

ausgedrückt, und setzt man zur Abkürzung $\varphi(x) = u$, so folgt, wie leicht zu sehen:

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\varphi'(x)} \ldots d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}} = \int_\alpha^\beta \frac{d^n F(s,u)}{du^n} ds$$

und folglich nach der am Schlusse des Art. 1 angeführten Gleichung:

$$A_n = \frac{1}{n!}\int_\alpha^\beta \frac{d^n F(s,u)}{du^n} ds \text{ für } u = \varphi(a) = 0,$$

so dass man die Entwickelung hat:

$$f(x) = A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 \varphi(x)^2 + \ldots + A_n \varphi(x)^n + \ldots$$

Nicht selten wird die Auffindung des Coëfficienten A_n durch den Umstand wesentlich erleichtert, dass es im Allgemeinen erlaubt ist, vor Ausführung der Integration $u = 0$ zu setzen.

Es ist leicht, diese Betrachtung auf die Entwickelung einer Function $f(x,y)$ nach Potenzen von $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ auszudehnen. Angenommen, man habe für $f(x,y)$ eine passende Darstellung in Form eines bestimmten Doppelintegrals gefunden, so dass

$$f(x,y) = \int_\alpha^\beta ds \int_\lambda^\mu F\big(s,\, t,\, \varphi(x),\, \psi(y)\big)\, dt$$

und die Grenzen constant und von x, y unabhängig sind; dann erhält man durch successives Differentiiren, wenn $\varphi(x) = u$, $\psi(y) = v$ gesetzt wird, die folgende Gleichung:

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)\psi'(y)} d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\varphi'(x)} \ldots d \frac{1}{\varphi'(x)} d \frac{1}{\psi'(y)} d \frac{1}{\psi'(y)} \ldots d \frac{1}{\psi'(y)} \cdot \frac{d^2 f(x,y)}{dx\, dy}}{dx^{m-1}\, dy^{n-1}} =$$

$$\int_\alpha^\beta ds \int_\lambda^\mu \frac{d^{m+n} F(s,t,u,v)}{du^m\, dv^n} dt,$$

woraus man sofort findet:

$$P_{m,n} = \frac{1}{m!\, n!}\int_\alpha^\beta ds \int_\lambda^\mu dt \frac{d^{m+n} F(s,t,u,v)}{du^m\, dv^n} \text{ für } u = 0,\ v = 0.$$

Für die Bestimmung der Coëfficienten, welche durch diese Gleichungen gegeben sind, kann auch noch das folgende Verfahren bezeichnet werden.

Lässt sich aus der Gleichung:

$$u = \varphi(x)$$

der Werth von x als Function von u in endlicher Form entwickeln, so kann offenbar auch $f(x)$ als Function von u dargestellt werden. Wenn dies geschehen, wird man finden:

$$f(x) = F(u)$$

und, wenn man diese Gleichung nach x differentiirt, hierauf durch $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$ dividirt, und dieses Verfahren wiederholt anwendet, zu der Gleichung:

$$\frac{\frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)}\, d\, \frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \cdot \cdot d\, \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{dx^{n-1}} = \frac{d^n\, F(u)}{du^n}$$

gelangen. Daraus folgt unmittelbar:

$$A_n = \frac{1}{n!}\, \frac{d^n\, F(u)}{du^n} \text{ für } x = a, \text{ oder } u = \varphi(a) = 0.$$

Auch dieses Verfahren lässt sich ohne Mühe auf Functionen von zwei Veränderlichen ausdehnen.

Kann man nämlich aus den Gleichungen:

$$u = \varphi(x) \quad , \quad v = \psi(y)$$

x und y als Functionen resp. von u und v in endlicher Form finden, so lässt sich auch $f(x,y)$ als Function von u und v darstellen, so dass:

$$f(x,y) = F(u,v).$$

Bildet man, in analoger Weise wie oben, den im Art. 8 für $P_{m,n}$ angegebenen Ausdruck und setzt dann für x und y resp. die Werthe a und b, für welche $\varphi(a)$ und $\psi(b)$ verschwinden, so ergibt sich für die Bestimmung jenes Coëfficienten die Formel:

$$P_{m,n} = \frac{1}{m!\, n!}\, \frac{d^{m+n}\, F(u,v)}{du^m\, dv^n}, \text{ für } u = 0,\ v = 0.$$

In den meisten Fällen wird dieses letztere, nur scheinbar einfache Verfahren grössere Weitläufigkeiten als jedes der früher beschriebenen verursachen.

14.

Die im vorigen Art. für A_n entwickelte Formel führt in manchen Fällen zu bemerkenswerthen Resultaten. Um einen solchen Fall anzuführen, bemerke ich, dass, wie Legendre *Exérc. IV. p. 101* fand:

$$\int_0^\infty \frac{s^a\,ds}{1 + 2s\cos x + s^2} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \cdot \frac{\sin ax}{\sin x}, \text{ wenn } a < 1.$$

ist, woraus man erhält:

$$\frac{\sin ax}{\sin x} = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^a\,ds}{1 + 2s\cos x + s^2}, \; a < 1.$$

Angenommen nun, es handle sich darum, die Function:

$$f(x) = \frac{\sin ax}{\sin x}$$

nach Potenzen von $\varphi(x) = \cos x$ zu entwickeln, so hat man

$$F(s,u) = \frac{\sin a\pi}{\pi} \frac{s^a}{1 + 2su + s^2}$$

folglich:

$$\frac{d^n F(s,u)}{du^n} = (-1)^n . 1 . 2 . 3 . . n . 2^n \frac{\sin a\pi}{\pi} \cdot \frac{s^{a+n}}{(1 + 2su + s^2)^{n+1}}$$

und es ist daher:

$$A_n = (-1)^n \frac{2^n \sin a\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{a+n}\,ds}{(1 + 2su + s^2)^{n+1}} \text{ für } u = 0.$$

Man kann nun diesen Coëfficienten durch Euler'sche Integrale ausdrücken; setzt man nämlich

$$s^2 = x, \quad s = x^{\frac{1}{2}}, \quad ds = \frac{1}{2} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$$

so folgt:

$$A_n = (-1)^n \frac{2^{n-1} \sin a\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{a+n-1}{2}} dx}{(1+x)^{n+1}}$$

oder:

$$A_n = (-1)^n \frac{2^{n-1} \sin a\pi}{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-a+1}{2}\right)}{1.2.3 \ldots n}$$

Das Product der beiden Gammafunctionen lässt sich, sowohl wenn n eine gerade, als wenn es eine ungerade Zahl ist, näher entwickeln. Um diese beiden Fälle, wie es geschehen muss, zu unterscheiden, sei $n = 2m$, so erhält man mit Berücksichtigung der bekannten Formeln:

$$\Gamma(m+b) = b\,(b+1)\,(b+2) \ldots (b+m-1)\, \Gamma(b)$$

$$\Gamma(b)\, \Gamma(1-b) = \frac{\pi}{\sin b\pi} \quad , \quad \Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos \frac{a\pi}{2}}$$

die Gleichungen:

$$A_0 = \sin \frac{a\pi}{2}$$

$$A_{2m} = \frac{(1^2-a^2)\,(3^2-a^2)\,(5^2-a^2) \ldots [(2m-1)^2 - a^2]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4 \ldots 2m} \sin \frac{a\pi}{2}$$

Setzt man dagegen $n = 2m+1$, so folgt in ähnlicher Weise

$$A_1 = -\,a \cos \frac{a\pi}{2}$$

$$A_{2m+1} = -\,\frac{a\,(2^2-a^2)\,(4^2-a^2)\,(6^2-a^2) \ldots [(2m)^2-a^2]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5 \ldots (2m+1)} \cos \frac{a\pi}{2}$$

Dieses vorausgesetzt, hat man also die folgende Gleichung:

$$\frac{\sin ax}{\sin x} =$$

$$\sin \frac{a\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1^2-a^2}{1.2} \cos^2 x + \frac{(1^2-a^2)\,(3^2-a^2)}{1.2.3.4} \cos^4 x + \ldots \right\}$$

$$-\,a \cos \frac{a\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{2^2-a^2}{1.2.3} \cos^2 x + \frac{(2^2-a^2)\,(4^2-a^2)}{1.2.3.4.5} \cos^4 x + \ldots \right\} \cos x$$

welche unter der Bedingung gilt, dass der Zahlenwerth von a kleiner als 1 sei und x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liege.

Die Theorie der bestimmten Integrale bietet viele Hilfsmittel dar, die Anzahl der Resultate oben bezeichneter Art zu vermehren. Da es sich aber hier nur um die allgemeinere Betrachtung der Potenzreihen handelt, so werde ich mich mit besonderen Fällen nicht weiter beschäftigen.

15.

Wie in der Einleitung bemerkt worden ist, wird sich die vorliegende Arbeit auch mit der Summirung derjenigen Reihen befassen, welche aus der Verbindung der Entwickelungscoëfficienten zweier nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortschreitenden Reihen gebildet sind.

Für diese letzteren Reihen, welche die sogenannten Fourier-schen sind, findet, wie bekannt, der folgende Satz Statt.

Werden aus den Gleichungen:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos mx \,.\, dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin nx\, dx$$

die Coëfficienten der Reihen:

$$\frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_m \cos mx + \ldots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots$$

berechnet, so stellt diese Reihe die Function $\varphi(x)$ für alle zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegenden Werthe von x dar, insoferne $\varphi(x)$ innerhalb dieses Intervalles stetig bleibt; die Reihe gibt aber das arithmetische Mittel der zwei Werthe von $\varphi(x)$, welche, im Falle der Unstetigkeit dieser Function, für einen Werth von x stattfinden.

Dieses vorausgesetzt, mögen nun $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei, innerhalb des Intervalles von $-\pi$ bis $+\pi$ stetige Functionen bezeichnen, welche in die Reihen:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_m \cos mx + \ldots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots$$
$$\psi(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x + \ldots + \alpha_\mu \cos \mu x + \ldots$$
$$+ \beta_1 \sin x + \beta_2 \sin 2x + \ldots + \beta_\nu \sin \nu x + \ldots$$

entwickelt sind. Das Product derselben lässt sich durch die Gleichung:

$$\varphi(x)\,\psi(x) = \Sigma\,(a_m \cos mx + b_n \sin nx)\,(\alpha_\mu \cos \mu x + \beta_\nu \sin \nu x)$$

bezeichnen, wenn man auf der rechten Seite für m, n, μ, ν alle ganzen Zahlen, von 0 angefangen, statt a_0 und α_0 aber nur $\frac{1}{2}\,a_0$ und $\frac{1}{2}\,\alpha_0$ setzt. Integrirt man nun jene Gleichung zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$, was dem angeführten Satze zufolge erlaubt ist, so findet man:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\;\psi(x)\;dx =$$

$$\Sigma\,\left(a_m \alpha_\mu \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos \mu x\, dx \;+\; a_m \beta_\nu \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin \nu x\, dx\right)$$

$$+\,\Sigma\,\left(\alpha_\mu b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \mu x \sin nx\, dx \;+\; b_n \beta_\nu \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin \nu x\, dx\right)$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\,[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\,[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\,[\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

ergeben sich die folgenden Werthe für die Integrale unter dem Summenzeichen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos \mu x\, dx &= 0\,, && \text{wenn } \mu \gtrless m\\
&= \pi\,, && \quad ,,\;\; \mu = m\\
&= 2\pi, && \quad ,,\;\; \mu = m = 0\\
\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin \mu x\, dx &= 0\,, && \quad ,,\;\; \nu \gtrless n\\
&= \pi\,, && \quad ,,\;\; \nu = n\\
\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin \nu x\,.\,dx &= 0\,, && m \text{ und } \nu \text{ beliebige}\\
& && \text{ganze Zahlen.}
\end{aligned}$$

Es bleiben daher nur zwei Glieder unter dem Summenzeichen stehen, so dass man hat:

$$\pi \Sigma (a_m \alpha_m + b_n \beta_n) = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \, \psi(x) \, dx$$

oder, mit Rücksicht auf das früher Bemerkte:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + \ldots \\ \qquad + b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + b_3 \beta_3 + \ldots \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \, \psi(x) \, dx \ldots (1)$$

Aus diesem bemerkenswerthen Resultate ergibt sich zugleich, dass, wenn man $\psi(x) = \varphi(x)$ setzt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots \\ \qquad + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)^2 \, dx.$$

Eine Gleichung dieser Art findet also jedesmal Statt, sobald die einer Function entsprechende trigonometrische Entwickelung gefunden ist.

16.

Es ist bekannt, dass, wenn man die Giltigkeit der trigonometrischen Entwickelung auf das Intervall von 0 bis π einschränkt, die Cosinusglieder allein schon hinreichend sind, die Function im Bereiche jenes Intervalles, einschliesslich der Grenzen 0 und π darzustellen. Man muss dann die Coëfficienten aus der Gleichung:

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos mx \, dx$$

berechnen, und erhält:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_m \cos mx + \ldots$$

Wenn nun eben so für eine zweite Function die Coëfficienten:

$$\alpha_\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \cos \mu x \, . \, dx$$

berechnet sind, und also die Reihe:

$$\psi(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + . . + a_\mu \cos \mu x + . . .$$

erhalten worden ist, so ergibt sich auf gleiche Art wie im vorigen Artikel durch Multiplication der beiden Reihen die Gleichung:

$$\Sigma\, a_m \alpha_\mu \int_0^\pi \cos mx \cos \mu x\, dx = \int_0^\pi \varphi(x)\, \psi(x)\, dx.$$

woraus sich, nach früheren Bestimmungen:

$$\frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + \ldots . = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x)\, \psi(x)\, dx . . (\mathrm{I})$$

und hieraus wieder:

$$\frac{1}{2} a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \ldots = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x)^2\, dx \ldots (1)$$

ergibt. Bestimmt man die Coëfficienten b_m, β_μ aus den Gleichungen:

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin mx\, dx \quad , \quad \beta_\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(x) \sin \mu x . dx ,$$

so gelten, wie bekannt, die Entwickelungen:

$$\varphi(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + . . + b_m \sin mx + . . .$$
$$\psi(x) = \beta_1 \sin x + \beta_2 \sin 2x + \beta_3 \sin 3x + . . + \beta_\mu \sin \mu x + . . .$$

innerhalb des Intervalles von 0 bis π, jedoch mit Ausschluss dieser Grenzwerthe selbst.

Durch Multiplication und darauf folgende Integration jener Gleichungen findet man analog wie im vorhergehenden Falle:

$$b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + b_3 \beta_3 + b_4 \beta_4 + \ldots = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x)\, \psi x)\, dx \ldots (\mathrm{II}).$$

Setzt man auch hierin $\psi(x) = \varphi(x)$, so folgt noch:

$$b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 + b_4{}^2 + \ldots . = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x)^2\, dx \ldots (2)$$

Diese Gleichungen, sowie jene des vorigen Artikels, liefern, wie man sieht, die Summen neuer Reihen, sobald die Entwickelung einer oder zweier Functionen nach Sinus oder Cosinus der Vielfachen von x gegeben ist. Es ist jedoch nicht schwer, auch die Summen von Reihen abzuleiten, welche auf andere als die oben vorausgesetzte Art aus den Entwickelungs-Coëfficienten a und b gebildet sind.

17.

Um dieses an einigen besonderen Fällen zu zeigen, multiplicire man die Gleichung:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_m \cos mx + \ldots$$

mit $\sin nx$ und integrire sie dann zwischen den Grenzen 0 und π. Bemerkt man hierauf, dass:

$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2} [\sin (n+m) x + \sin (n-m) x],$$

so erscheint das allgemeine Glied der Reihe in der Form:

$$\frac{1}{2} a_m \left\{ \int_0^\pi \sin (n+m) x \, dx + \int_0^\pi \sin (n-m) x . dx \right\}$$

aus welcher man auf der Stelle ersieht, dass jenes Glied immer verschwindet, wenn m und n gleichzeitig entweder gerade oder ungerade Zahlen sind, dass also nur diejenigen Fälle in Betracht kommen, in welchen m und n ungleichartig sind. Setzt man also $2m$ für m, und $2n+1$ für n und führt man die beiden Integrationen aus, so erfolgt:

$$a_{2m} \left\{ \frac{1}{2m+2n+1} + \frac{1}{2n-2m+1} \right\} = \frac{2(2n+1)\, a_{2m}}{(2n+1)^2 - 4m^2}$$

und man wird hierdurch zu der folgenden Gleichung geführt:

$$\frac{a_0}{(2n+1)^2} + \frac{a_2}{(2n+1)^2 - 4.1^2} + \frac{a_4}{(2n+1)^2 - 4.2^2} + \ldots + \frac{a_{2m}}{(2n+1)^2 - 4m^2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{4n+2} \int_0^\pi \varphi(x) \sin (2n+1) x . dx = \frac{\pi}{4} \frac{b_{2n+1}}{2n+1} \ldots . (1)$$

Als besondern Fall der Gleichung (I) des Art. 16 will ich die bekannte Entwickelung:

$$\varphi(x) = \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^{\alpha} \cos \frac{\alpha x}{2} =$$

$$1 + \frac{\alpha}{1} \cos x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} \cos 2x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3} \cos 3x + \ldots.$$

in ähnlicher Weise erörtern und zu dem Ende setzen:

$$\psi(x) = \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^{\beta} \cos \frac{\beta x}{2} =$$

$$1 + \frac{\beta}{1} \cos x + \frac{\beta(\beta-1)}{1.2} \cos 2x + \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.2.3} \cos 3x + \ldots.$$

Jener Gleichung (I) gemäss erhält man also:

$$2 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} \frac{\beta(\beta-1)}{1.2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3} \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.2.3} + \ldots$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{\alpha+\beta} \cos \frac{\alpha x}{2} \cos \frac{\beta x}{2}\, dx$$

Vor Allem handelt es sich nun um die nähere Bestimmung dieses Integrals. Man kann demselben, abgesehen von dem constanten Factor, offenbar die folgende Form:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{\alpha+\beta} \left[\cos \frac{(\alpha-\beta)\, x}{2} + \cos \frac{(\alpha+\beta)\, x}{2}\right] dx$$

geben, welche, wenn man x für $\frac{x}{2}$ setzt, sich in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\alpha+\beta} \left[\cos (\alpha-\beta)\, x + \cos (\alpha+\beta)\, x\right] dx$$

verwandelt. Nun findet aber die bekannte Gleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^p \cos qx.dx = \frac{\pi}{2^{p+1}} \cdot \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(1+\frac{p+q}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{p-q}{2}\right)}$$

Statt, vermittelst welcher man

$$\frac{\pi}{2^{1+\alpha+\beta}}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}+1\right]$$

findet. Dieses Resultat führt nun unmittelbar zu der folgenden Gleichung:

$$1+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\cdot\frac{\beta(\beta-1)}{1.2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\cdot\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.2.3}+\ldots$$
$$=\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+\beta)}$$

wodurch eine Eigenschaft der Binominal-Coëfficienten ausgesprochen ist.

Um einige specielle Fälle dieser Relation hervorzuheben, will ich zunächst annehmen, es sei eine der beiden Grössen α, β, z. B. β eine positive ganze Zahl. Dann bricht die Reihe ab, und man erhält zur Bestimmung ihrer Summe die Gleichung:

$$1+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\cdot\frac{\beta(\beta-1)}{1.2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\cdot\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots\beta}$$
$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+\beta)}{1.2.3\ldots\beta}$$

Nimmt man an, es sei auch α eine ganze Zahl, und setzt

$$\alpha=\beta=n,$$

so ergibt sich hieraus:

$$1+\left[\frac{n}{1}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2+\ldots+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\left[\frac{n}{1}\right]^2+1$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1\;2.3\ldots n}$$

Diese merkwürdige Gleichung fand bekanntlich zuerst Lagrange gelegentlich der Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit, für welche sich auf zwei verschiedenen Wegen die Ausdrücke auf der rechten und linken Seite der Gleichung ergaben und welche also einander gleich sein mussten.

Setzt man dagegen $2m+1$ für m, und $2n$ für n, so ergibt sich auf gleiche Weise:

$$\frac{a_1}{4n^2-1^2}+\frac{a_3}{4n^2-3^2}+\frac{a_5}{4n^2-5^2}+\frac{a_7}{4n^2-7^2}+\ldots+\frac{a_{2m+1}}{4n^2-(2m+1)^2}+\ldots$$
$$=\frac{1}{4n}\int_0^\pi \varphi(x)\sin 2nx.dx.=\frac{\pi}{4}\frac{b_{2n}}{2n}\ldots(2)$$

In diesen beiden Gleichungen ist allgemein:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\cos nx\,.\,dx$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin nx\,.\,dx$$

zu setzen.

Ich will nunmehr dieselbe Betrachtung auf die Reihe:

$$\varphi(x)=b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\ldots+b_m\sin mx+\ldots$$

anwenden und zu dem Ende durchgehends mit $\cos nx$ multipliciren. Integrirt man hierauf zwischen den Grenzen 0 und π, bemerkt auch, dass das allgemeine Glied der Reihe hierdurch in:

$$\frac{1}{2}b_{2m}\left\{\int_0^\pi \sin(m+n)x\,dx+\int_0^\pi \sin(m-n)x\,dx\right\}$$

übergeht, so zeigt sich auch hier, dass nur dann, wenn m und n ungleichartige ganze Zahlen sind, jenes Glied nicht verschwindet. Wenn also einmal $2n+1$ und dann $2n$ für n, und entsprechend $2m$ und $2m+1$ für m gesetzt und im Übrigen wie in den beiden vorhergehenden Fällen verfahren wird, so ergeben sich die beiden weiteren Gleichungen:

$$\frac{b_2}{4.1^2-(2m+1)^2}+\frac{2b_4}{4.2^2-(2n+1)^2}+\ldots+\frac{mb_{2m}}{4m^2-(2n+1)^2}+\ldots$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^\pi \varphi(x)\cos(2n+1)x.dx=\frac{\pi}{a}a_{2n+1}\ldots(3)$$

$$\frac{b_1}{1^2 - 4n^2} + \frac{3b_3}{3^2 - 4n^2} + \frac{5b_5}{5^2 - 4n^2} + \ldots + \frac{(2m+1)\,b_{2m+1}}{(2m+1)^2 - 4n^2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(x) \cos 2nx\, dx = \frac{\pi}{4}\, a_{2n} \ldots (4)$$

Die Gleichungen (1) bis (4) sind von besonderem Interesse, weil sie zeigen, dass die Entwickelungs-Coëfficienten a und b, welche sich auf eine und dieselbe Function $\varphi(x)$ beziehen, gegenseitig der eine durch den andern und zwar, wie man sieht, vermittelst unendlicher Reihen bestimmt ist.

18.

Nach diesen Bemerkungen kehre ich zu den in Art. 15 und 16 begründeten Formeln zurück, um einige noch speciellere Anwendungen von denselben zu machen.

Wie schon Euler fand, besteht die Gleichung:

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

so lange, als x zwischen den Grenzen 0 und π liegt; auch ist bekannt, dass unter denselben Bedingungen:

$$\psi(x) = \frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots$$

ist. Wendet man auf diese beiden Entwickelungen den Satz (II) des Art. 16 an, so ergibt sich:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x}{2}\, dx = \frac{\pi^2}{8}$$

Ferner folgt aus der Gleichung (2) desselben Artikels:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

Diese beiden Resultate stimmen mit bekannten Formeln überein.

Macht man ferner die Annahme, es sei $\beta = \alpha$, ohne jedoch vorauszusetzen, dass α, β ganze Zahlen seien, so findet sich das weitere Resultat:

$$1 + \left[\frac{\alpha}{1}\right]^2 + \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\right]^2 + \left[\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\right]^2 + \ldots = \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha)}$$

wobei die Reihe linker Hand ohne Ende fortgeht.

Es ist nicht ohne Interesse zu bemerken, dass aus den vorhergehenden Resultaten eine Reihe für den reciproken Werth des Euler'schen Integrals erster Art abgeleitet werden kann. In der That, da:

$$\Gamma(1+\alpha) = \alpha\,\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1+\beta) = \beta\,\Gamma(\beta)$$

und ebenso:

$$\Gamma(1+\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta),$$

so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} =$$

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\left[1 + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\cdot\frac{\beta(\beta-1)}{1.2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\cdot\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.2.3} + \ldots\right]$$

Für $\beta = 1 - \alpha$ erhält man ferner eine Reihe, welche den Werth des Ausdrucks $\frac{\sin \alpha\pi}{\pi}$ darstellt.

19.

Geht man von der bekannten Gleichung

$$\varphi(x) = -\log\left(\sin\frac{x}{2}\right) = \log 2 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots$$

aus, und wendet man darauf den Satz (1) des Art. 16 an, so erfolgt:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\log\sin\frac{x}{2}\right]^2 dx = 2\,[\log 2]^2 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

oder, mit Rücksicht auf die Resultate des Art. 18:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\log\sin\frac{x}{2}\right]^2 dx = 2\,[\log 2]^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

Man kann dieser Gleichung eine andere Form geben, wenn man

$$\log \sin \frac{x}{2} = -t$$

also:

$$dx = \frac{-2\,dt}{\sqrt{e^{2t}-1}}$$

setzt. Es ergibt sich alsdann:

$$\int_0^\infty \frac{t^2 dt}{\sqrt{e^{2t}-1}} = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2}[\log 2]^2.$$

Ich bemerke hierzu, dass aus den bekannten Gleichungen:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\log(1-2a\cos x+a^2) = a\cos x + \frac{a^2}{2}\cos 2x + \frac{a^3}{3}\cos 3x + \ldots$$

$$\psi(x) = arc\,tg\left(\frac{a\sin x}{1-a\cos x}\right) \qquad = a\sin x + \frac{a^2}{2}\sin 2x + \frac{a^3}{3}\sin 3x + \ldots$$

die beiden Resultate:

$$\int_0^\pi [\log(1-2a\cos x+a^2)]^2\,dx$$

$$= 2\pi\left\{a^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^3}{3}\right)^2 + \left(\frac{a^4}{4}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$\int_0^\pi \left[arc\,tg\left(\frac{a\sin x}{1-a\cos x}\right)\right]^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{a^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^3}{3}\right)^2 + \left(\frac{a^4}{4}\right)^2 + \ldots\right\}$$

erhalten werden, welche allgemeiner sind als einige der vorhergehenden, und welche zugleich zeigen, dass das erstere Integral das Vierfache des letzteren ist.

Um eine letzte Anwendung der allgemeinen Formeln zu betrachten, will ich die bekannte Entwickelung:

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\cos ax =$$

$$\frac{1}{a} + \frac{2a}{1^2-a^2}\cos x - \frac{2a}{2^2-a^2}\cos 2x + \frac{2a}{3^2-a^2}\cos 3x - \ldots$$

benutzen und dieselbe mit der analogen:

$$\psi(x) = \frac{\pi}{\sin \beta\pi} \cos \beta x =$$

$$\frac{1}{\beta} + \frac{2\beta}{1^2 - \beta^2} \cos x - \frac{2\beta}{2^2 - \beta^2} \cos 2x + \frac{2\beta}{3^2 - \beta^2} \cos 3x - \ldots$$

verbinden; man erhält dann:

$$\frac{2\pi}{\sin \alpha\pi \sin \beta\pi} \int_0^\pi \cos \alpha x \cos \beta x \, dx =$$

$$\frac{2}{\alpha\beta} + \frac{4\alpha\beta}{(1^2 - \alpha^2)(1^2 - \beta^2)} + \frac{4\alpha\beta}{(2^2 - \alpha^2)(2^2 - \beta^2)} + \ldots$$

Führt man die Integration aus, so wird dadurch die Summe der Reihe rechter Hand gefunden. Das Resultat dieser einfachen Rechnung ist das folgende:

$$\frac{1}{2\alpha^2\beta^2} + \frac{1}{(1^2-\alpha^2)(1^2-\beta^2)} + \frac{1}{(2^2-\alpha^2)(2^2-\beta^2)} + \frac{1}{(3^2-\alpha^2)(3^2-\beta^2)} + \ldots$$
$$= \frac{\pi(\alpha \operatorname{cotg} \beta\pi - \beta \operatorname{cotg} \alpha\pi)}{2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)}$$

Für den Fall, dass $\beta = \alpha$, ergibt sich hieraus:

$$\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{1}{(1^2 - \alpha^2)^2} + \frac{1}{(2^2 - \alpha^2)^2} + \frac{1}{(3^2 - \alpha^2)^2} + \ldots$$
$$= \frac{\pi(2\alpha\pi + \sin 2\alpha\pi)}{8\alpha^3 \sin^2 \alpha\pi}$$

und für $\alpha = \frac{1}{2}$ die stark convergirende Reihe:

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{63^2} + \frac{1}{99^2} + \ldots$$

wobei die Zahlen im Nenner eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, deren constante Differenz $= 8$, und deren allgemeines Glied $= 4n^2 - 8n + 3$ ist.

20.

Das im Vorhergehenden angewendete Verfahren ist nicht das einzige, durch welches aus der trigonometrischen Entwickelung einer Function die Summen neuer Reihen, wenigstens in Form bestimmter Integrale, abgeleitet werden können; zu diesem Ziele führt auch noch die folgende Betrachtung. Angenommen, die gegebene Reihe schreite nicht nur nach Sinus oder Cosinus der Vielfachen von x, sondern gleichzeitig auch nach den Potenzen einer zweiten Grösse u fort, und es sei:

$$\varphi(x,u) = A_1 u \sin x + A_2 u^2 \sin 2x + \ldots + A_n u^n \sin nx + \ldots$$

so kann für die innerhalb gewisser Grenzen willkürliche Grösse u eine Function von x, und zwar:

$$u = \rho e^{x\sqrt{-1}}$$

gesetzt werden, und man wird haben:

$$\varphi\left(x, \rho e^{x\sqrt{-1}}\right) =$$

$$A_1 \rho e^{x\sqrt{-1}} \sin x + A_2 \rho^2 e^{2x\sqrt{-1}} \sin 2x + \ldots + A_m \rho^m e^{mx\sqrt{-1}} \sin mx + \ldots (1)$$

Auf gleiche Weise wird man aus einer zweiten Entwickelung der bezeichneten Art:

$$\psi(x,u) = B_1 u \sin x + B_2 u^2 \sin 2x + \ldots + B_n u^n \sin nx + \ldots$$

die Reihe finden:

$$\psi\left(x, \rho e^{x\sqrt{-2}}\right) =$$

$$B_1 \rho e^{x\sqrt{-1}} \sin x + B_2 \rho^2 e^{2x\sqrt{-1}} \sin 2x + \ldots + B_n \rho^n e^{nx\sqrt{-1}} \sin nx + \ldots (2)$$

Dieses vorausgesetzt multiplicire man die Gleichungen (1) und (2) und integrire hierauf nach x zwischen den Grenzen 0 und π, so gelangt man, wie leicht zu sehen, zu der Gleichung:

$$\int_0^\pi \varphi\left(x \rho e^{x\sqrt{-1}}\right) \psi\left(x, \rho e^{x\sqrt{-1}}\right) dx =$$

$$\Sigma A_m B_n \rho^{m+n} \int_0^\pi e^{(m+n)x\sqrt{-1}} \sin mx \sin nx \, dx$$

wobei das Summenzeichen sich über alle Werthe erstreckt, welche erhalten werden, wenn man für m und n alle ganzen Zahlen $1, 2, 3\dots$ setzt. Dem Ausdruck unter dem Integralzeichen kann man die Form:

$$\frac{1}{4}\sqrt{-1}\left[\sin 2mx + \sin 2nx - \sin(2m+2n)x\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[\cos 2mx + \cos 2nx - \cos(2m+2n)x - 1\right]$$

geben, aus welcher sich unmittelbar ersehen lässt, dass, wenn weder m noch n Null ist:

$$\int_0^\pi e^{(m+n)x\sqrt{-1}} \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Hieraus folgt nun, dass die Gleichung:

$$\Sigma A_m B_n \rho^{m+n} = -\frac{4}{\pi}\int_0^\pi \varphi\left(x, \rho e^{x\sqrt{-1}}\right) \psi\left(x, \rho e^{x\sqrt{-1}}\right) dx$$

stattfindet, um deren Begründung es sich handelte.

Die durch das Summenzeichen angedeutete Doppelreihe, in explicirter Form dargestellt, ist die folgende:

$$A_1 B_1 \rho^2 + (A_1 B_2 + A_2 B_1)\rho^3 + (A_1 B_3 + A_2 B_2 + A_3 B_1)\rho^4 + \dots$$
$$+ (A_1 B_{n-1} + A_2 B_{n-2} + \dots + A_{n-2} B_2 + A_{n-1} B_1)\rho^n + \dots$$

so dass also die Summe dieser Reihe durch das obige Integral gegeben ist. Offenbar gilt der Satz auch noch in dem Falle, wenn allgemein $A_n = B_n$ ist.

Das so eben befolgte Verfahren auf die beiden, als gegeben vorausgesetzte Entwickelungen:

$$\varphi(x,u) = A_1 u \cos x + A_2 u^2 \cos 2x + \dots + A_m u^m \cos mx + \dots$$
$$\psi(x,u) = B_1 u \cos x + B_2 u^2 \cos 2x + \dots + B_n u^n \cos nx + \dots$$

angewendet, führt zu dem Ergebnisse, dass, weil für alle von Null verschiedene Werthe von m und n das Integral:

$$\int_0^\pi e^{(m+n)x\sqrt{-1}} \cos mx \cos nx \, dx = +\frac{\pi}{4}$$

ist, die Gleichung stattfindet:

$$\Sigma A_m B_n \rho^{m+n} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi\left(x, \rho e^{x\sqrt{-1}}\right) \psi\left(x, \rho e^{x\sqrt{-1}}\right) dx,$$

wobei die durch das Summenzeichen angedeutete Doppelreihe in entwickelter Form dieselbe ist, wie in dem vorhin betrachteten Falle.

21.

Der dritte in der vorliegenden Arbeit zu erörternde Gegenstand steht zu dem soeben berührten in naher Beziehung, indem er sich in ähnlicher Weise mit den Potenzreihen beschäftigt, wie der letztere mit den trigonometrischen.

Im Jahre 1798 hat Parseval den merkwürdigen Satz gefunden und in den *Mémoires présentés à l'Institut*, t. I, Paris 1805, ohne Beweis veröffentlicht, dass man, wenn die Summen der beiden Reihen:

$$a_0 + a_1 x + a_3 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = \varphi(x)$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots = \psi(x)$$

bekannt sind, die Summe der aus dem Product gleichvielter Coëfficienten gebildeten Glieder finden, nämlich, vermöge der Gleichung:

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi\left(e^{t\sqrt{-1}}\right) \psi\left(e^{-t\sqrt{-1}}\right) dt$$

durch ein bestimmtes Integral darstellen kann.

Dieser Satz ist einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig; er lässt sich nämlich auf eine beliebige Anzahl von Potenzreihen und die aus deren gleichvielten Gliedern gebildeten Producte ausdehnen.

Um dieses näher zu zeigen, werde ich vorerst den Parseval-schen Satz für zwei Reihen in etwas allgemeinerer Fassung nachweisen.

Angenommen es seien die beiden, als convergent vorausgesetzten Reihen:

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \ldots + a_m u^m + \ldots = \varphi(u)$$
$$b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3 + \ldots + b_n u^n + \ldots = \psi(u)$$

gegeben und es werde in der ersten

$$u = \rho e^{x\sqrt{-1}},$$

in der letzten dagegen

$$u = e^{-x\sqrt{-1}}$$

gesetzt, und wenn dies geschehen, das Product der beiden Reihen gebildet, so wird man die Gleichung erhalten:

$$\Sigma a_m b_n \rho^m \,.\, e^{(m-n)\,a\sqrt{-1}} = \varphi\left(\rho e^{x\sqrt{-1}}\right)\,\psi\left(e^{-x\sqrt{-1}}\right)$$

worin für m und n alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞ zu setzen sind.

Integrirt man nun diese Gleichung nach x zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ und bemerkt man, dass, so lange m und n von einander verschieden sind:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{(m-n)x\sqrt{-1}}\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\cos(m-n)\,x + \sqrt{-1}\sin(m-n)\,x\right]dx = 0$$

und nur in dem Falle, wenn $m = n$ ist, das Integral einen von Null verschiedenen Werth, nämlich 2π, erhält, so ist klar, dass die aus der Multiplication und Integration hervorgehende Reihe die folgende ist:

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 \rho + a_2 b_2 \rho^2 + \ldots + a_m b_m \rho^m + \ldots$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi\left(\rho e^{x\sqrt{-1}}\right)\psi\left(e^{-x\sqrt{-1}}\right)dx,$$

woraus der Parseval'sche Satz unmittelbar folgt, wenn man $\rho = 1$ setzt.

22.

Wird in der soeben begründeten Gleichung u für ρ gesetzt und dann deren rechte Seite durch $f(u)$ bezeichnet, so folgt:

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 u + a_2 b_2 u^2 + \ldots + a_m b_n u^m + \ldots = f(u)$$

Ist nun noch eine dritte Reihe:

$$c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + c_n u^n + \ldots = \chi(u)$$

gegeben und wendet man auf diese beiden Reihen den vorhin bewiesenen Satz an, so ergibt sich in gleicher Weise wie oben:

$$a_0 b_0 c_0 + a_1 b_1 c_1 \rho + a_2 b_2 c_2 \rho^2 + \ldots + a_m b_m c_m \rho^m + \ldots$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\rho e^{y\sqrt{-1}}\right) \chi\left(e^{-y\sqrt{-1}}\right) dy.$$

Nun ist aber:

$$f\left(\rho e^{y\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi\left(\rho e^{(x+y)\sqrt{-1}}\right) \psi\left(e^{-x\sqrt{-1}}\right) dx,$$

folglich hat man die Gleichung:

$$a_0 b_0 c_0 + a_1 b_1 c_1 \rho + a_2 b_2 c_2 \rho^2 + \ldots + a_m b_m c_m \rho^m + \ldots$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi\left(\rho e^{(x+y)\sqrt{-1}}\right) \psi\left(e^{-x\sqrt{-1}}\right) \chi\left(e^{-y\sqrt{-1}}\right) dx\, dy.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen und den im vorigen Artikel bewiesenen Satz allgemein auf n Reihen ausdehnen könne, ist so leicht einzusehen, dass es einer weiteren Auseinandersetzung nicht bedarf.

Das Resultat aber ist sehr bemerkenswerth und besteht in dem folgenden

Theorem. Sind die Summen der $n + 1$ Reihen:

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_m u^m + \ldots &= \varphi(u) \\
b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \ldots + b_m u^m + \ldots &= \psi(u) \\
c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + c_m u^m + \ldots &= \chi(u) \\
\partial_0 + \partial_1 u + \partial_2 u^2 + \ldots + \partial_m u^m + \ldots &= \theta(u) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

insgesammt gegeben und bezeichnen $x, y, z, \ldots$ der Zahl nach n Integrationsveränderliche, so findet die Gleichung Statt:

$$a_0b_0c_0\partial_0+a_1b_1c_1\partial_1\rho+a_2b_2c_2\partial_2\,.\,.\rho^2+\ldots+a_mb_mc_m\partial_m\,.\,.\rho^m+\ldots=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\iint..\int}_{}\!\!{}_{-\pi}^{+\pi}\varphi\left(\rho e^{(x+y+z+\,.\,.)\sqrt{-1}}\right)\psi\left(e^{-x\sqrt{-1}}\right)\chi\left(e^{-y\sqrt{-1}}\right)..dx\,dy\,dz..$$

Setzt man alle Reihen auch dann noch als convergent voraus, wenn u der Einheit gleich wird, so darf in der letztern Gleichung auch $\rho = 1$ gesetzt werden.

So wie man in den obigen Gleichungen die Charakteristiken $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ ohne die Richtigkeit derselben aufzuheben, mit einander vertauschen könnte, so würde sich, wenn man in der Formel:

$$a_0b_0 + a_1b\rho_1 + a_2b_2\rho^2 + \;.\;.\;.\; + a_mb_m\rho^m + \;.\;.\;.$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi\left(\rho e^{t\sqrt{-1}}\right)\psi\left(e^{-t\sqrt{-1}}\right)dt$$

dem Argument von ψ noch den Factor ρ beifügte, nichts ändern, als dass in der Reihe linker Hand durchgehends ρ^2 für ρ gesetzt werden müsste, so dass man hätte:

$$a_0b_0 + a_1b_1\rho^2 + a_2b_2\rho^4 + \;.\;.\;.\; + a_mb_m\rho^{2m} + \;.\;.\;.$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi\left(\rho e^{t\sqrt{-1}}\right)\psi\left(\rho e^{-t\sqrt{-1}}\right)dt.$$

Ähnliches würde in der allgemeinen Gleichung des vorigen Artikels eintreten.

23.

Um den Nutzen und die Bedeutung dieser Formeln näher zu zeigen, werde ich dieselben auf einige besondere Fälle anwenden.

Bezeichnet man, wie üblich, mit X_n die allgemeine Form der Kugelfunctionen von einer Veränderlichen, so ist:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = X_0 + X_1u + X_2u^2 + \ldots + X_nu^n + \ldots$$

Nimmt man ferner in der am Schlusse des vorigen Artikels angeführten Gleichung an, es sei:

$$\varphi(u) = \psi(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}}$$

dann ist:

$$a_n = b_n = X_n$$

und man erhält die Gleichung:

$$X_0^2 + X_1^2\rho^2 + X_2^2\rho^4 + \ldots + X_n^2\rho^{2n} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{dt}{\sqrt{1 - 2x\rho e^{t\sqrt{-1}} + \rho^2 e^{2t\sqrt{-1}}}\,.\,\sqrt{1 - 2x\rho e^{-t\sqrt{-1}} + \rho^2 e^{-2t\sqrt{-1}}}}$$

Durch Entwickelung des Productes unter den Wurzelzeichen erhält man den Ausdruck:

$$(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 x^2 - 4\rho x\,(1 + \rho^2)\cos t + 4\rho^2 \cos^2 t$$

woraus folgt, dass die Integration sich auf eine gerade Function bezieht, so dass man dem Integral die Form:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt{(1-\rho^2)^2 + 4\rho^2x^2 - 4\rho x\,(1+\rho^2)\cos t + 4\rho^2\cos^2 t}}$$

geben kann. Setzt man hierin $\cos t = u$, so nimmt der Ausdruck unter der Wurzel eine rationale Form an, und man erhält die Gleichung:

$$X_0^2 + X_1^2\rho^2 + X_2^2\rho^4 + \ldots + X_n^2\rho^{2n} + \ldots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,[(1-\rho^2)^2 + 4\rho^2x^2 - 4\rho x\,(1+\rho^2)\,u + 4\rho^2u^2]}} \ldots (1)$$

Diese Gleichung verliert für $\rho = 1$ ihre Giltigkeit, weil die Reihe:

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + \ldots$$

divergent ist. Für alle von der Einheit verschiedenen Werthe von ρ wird, wie man sieht, die Summe der Reihe durch elliptische Integrale dargestellt.

Für $x = 0$ ist $X_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1.3.5..(n-1)}{2.4.6..n}$ wenn n gerade

und $X_n = 0$, wenn n ungerade ist.

Bemerkt man ausserdem, dass für $x = 0$ die Function unter dem Integralzeichen eine gerade ist, und setzt man ρ für ρ^2, so geht die Gleichung (1) über in die folgende:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,[(1-\rho)^2 + 4\rho u^2]}} =$$

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rho^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \rho^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \rho^6 + \ldots$$

Wird hierin $u = \cos x$, also $2u^2 - 1 = \cos 2x$ gesetzt und das Integral durch die Reihe ausgedrückt, findet man die Gleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2\rho\cos 2x + \rho^2}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rho^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \rho^4 + \ldots\right\}$$

welche sich wohl auch auf anderem Wege verificiren liesse.

24.

In der Gleichung, welche am Schlusse des Artikels 22 erhalten worden ist, sei:

$$\varphi(u) = (1-u)^\alpha \quad , \quad \psi(u) = (1+u)^\beta \quad , \quad \rho = 1$$

also:

$$\varphi(u) = 1 - \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} u^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3} u^3 + \ldots$$

$$\psi(u) = 1 + \beta u + \frac{\beta(\beta-1)}{1.2} u^2 + \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.2.3} u^3 + \ldots$$

Es ergibt sich dann:

$$1 - \alpha\beta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta-1)}{1.2} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.2.3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left[1 - e^{t\sqrt{-1}}\right]^\alpha \left[1 + e^{-t\sqrt{-1}}\right]^\beta dt$$

Um diesem Integral eine andere Darstellung zu geben, will ich es vor allem so umgestalten, dass Null die untere Grenze wird. Man erhält dann:

$$\int_0^\pi \left\{\left(1-e^{t\sqrt{-1}}\right)^\alpha \left(1+e^{-t\sqrt{-1}}\right)^\beta + \left(1-e^{-t\sqrt{-1}}\right)^\alpha \left(1+e^{t\sqrt{-1}}\right)^\beta\right\} dt$$

Ferner lässt sich bewirken, dass alle Potenzen das positive Zeichen erhalten; man braucht zu dem Ende nur zu bemerken, dass $e^{\pm\pi\sqrt{-1}} = -1$ ist und dass man also schreiben kann:

$$\int_0^\pi \left\{\left(1+e^{-(\pi-t)\sqrt{-1}}\right)^\alpha\left(1+e^{-t\sqrt{-1}}\right)^\beta+\left(1+e^{(\pi-t)\sqrt{-1}}\right)^\alpha\left(1+e^{t\sqrt{-1}}\right)^\beta\right\} dt$$

Da aber, wie sich zeigen lässt, die binomische Entwickelung den einfachsten Werth der entsprechenden Potenz darstellt, so muss:

$$\left(1+e^{-(\pi-t)\sqrt{-1}}\right)^\alpha = \left(2\cos\frac{\pi-t}{2}\right)^\alpha . \, e^{-\frac{\pi-t}{2}\alpha\sqrt{-1}}$$

$$\left(1+e^{-t\sqrt{-1}}\right)^\beta = \left(2\cos\frac{t}{2}\right)^\beta . \, e^{-\frac{t}{2}\beta\sqrt{-1}}$$

gesetzt werden, so dass man die weitere Transformation:

$$2^{\alpha+\beta}\int_0^\pi \left\{e^{-\frac{1}{2}[\alpha\pi+(\beta-\alpha)t]\sqrt{-1}} + e^{+\frac{1}{2}[\alpha\pi+(\beta-\alpha)t]\sqrt{-1}}\right\}\sin^\alpha\frac{t}{2}\cos^\beta\frac{t}{2}\,dt$$

oder endlich:

$$2^{\alpha+\beta+1}\int_0^\pi \sin^\alpha\frac{t}{2}\cos^\beta\frac{t}{2}\cos\frac{1}{2}\left[\alpha\pi+(\beta-\alpha)t\right]\,dt$$

erhält. Wenn man hierin $t = 2x$ setzt und dann in die Gleichung substituirt, so geht diese über in die folgende:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cos^\beta x\cos\left[\frac{\alpha\pi}{2}+(\beta-\alpha)x\right]dx =$$

$$\frac{\pi}{2^{\alpha+\beta+1}}\left\{1-\alpha\beta+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta-1)}{1.2}-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.2.3}+\dots\right\}$$

wobei, wie sich leicht zeigen lässt, auch das Integral bezüglich α und β eine symmetrische Function ist.

Für $\beta = \alpha$ lässt sich das Integral durch Gammafunctionen ausdrücken. Setzt man nämlich $\sin x = \sqrt{t}$, so geht es über in:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{2}-1} . (1-t)^{\frac{\alpha+1}{2}-1} . \cos\frac{\alpha\pi}{2}\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{2\Gamma(\alpha+1)}\cos\frac{\alpha\pi}{2}$$

Man hat also in diesem Falle die Gleichung:

$$1-\alpha^2+\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\right]^2-\left[\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\right]^2+\left[\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}\right]^2-\dots$$
$$= \frac{2^{2\alpha}}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2} . \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Man sieht hieraus, dass die Summe der Reihe immer verschwindet, wenn α eine positive ungerade Zahl ist, dass aber, wenn $\alpha = 2n$ eine gerade Zahl bedeutet, die Reihe, welche in diesem Falle ebenfalls abbricht, die folgende Summe hat:

$$1-[2n]^2+\left[\frac{2n(2n-1)}{1.2}\right]^2-\left[\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}\right]^2$$
$$+\left[\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}\right]^2-\dots-[2n]^2+1$$
$$=(-1)^n . 2^{2n} . \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}$$

Diese Gleichung, welche meines Wissens neu ist, bilde gewissermassen den zweiten Fall der im Artikel 18 nachgewiesenen Gleichung von Lagrange, welche dieselben Glieder, wie die obige, aber keine Zeichenwechsel hat.

25.

Um den Satz des Artikels 22 auf einen besondern Fall anzuwenden, will ich annehmen, es sei:

$$\varphi(u) = (1+u)^\alpha , \psi(u) = (1+u)^\beta . \chi(u) = (1+u)^\gamma , \dots$$

und $\rho = 1$. Der Ausdruck unter dem Integralzeichen erhält dann die Form:

$$\left[1+e^{(x+y+z+\ldots)\sqrt{-1}}\right]^{\alpha}\left[1+e^{-x\sqrt{-1}}\right]^{\beta}\left[1+e^{-y\sqrt{-1}}\right]^{\gamma}\ldots.$$

oder, wenn man jede Potenz auf Modul und Argument reducirt:

$$2^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\cos^{\alpha}\frac{x+y+z+\ldots}{2}\cos^{\beta}\frac{x}{2}\cos^{\gamma}\frac{y}{2}\ldots e^{\frac{1}{2}[(\alpha-\beta)x+(\alpha-\gamma)y+\ldots]\sqrt{-1}}$$

Trennt man das Reelle vom Imaginären und bemerkt, dass das auf Letzteres sich beziehende Integral nothwendig Null sein muss, setzt man ferner $2x$, $2y$, $2z$, ... resp. für x, y, z, ... so führt der bezeichnete allgemeine Satz zu der folgenden bemerkenswerthen Gleichung:

$$\overline{\int\int\ldots\int}_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^{\alpha}(x+y+z+\ldots)\cos^{\beta}x\cos^{\gamma}y\ldots.$$
$$\times\cos[(\alpha-\beta)x+(\alpha-\gamma)y+\ldots]\,dx\,dy\,dz\ldots$$
$$=\frac{\pi}{2^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}}\left\{1+\alpha\beta\gamma\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta-1)}{1.2}\frac{\gamma(\gamma-1)}{1.2}\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.2.3}\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{1.2.3}\ldots+\ldots\right\}$$

wobei die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ der Zahl nach $n+1$ sind und n die Ordnung des Integrals ist.

Für $\alpha=\beta=\gamma=\ldots$ geht diese Gleichung in die folgende über:

$$\overline{\int\int\ldots\int}_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}[\cos(x+y+z+\ldots)\cos x\cos y\cos z\ldots]^{\alpha}dx\,dy\,dz\ldots=$$
$$\frac{\pi^{n}}{2^{(n+1)\alpha}}\left\{1+\alpha^{n+1}+\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\right]^{n+1}+\left[\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\right]^{n+1}+\ldots+\alpha^{n+1}+1\right\}$$

aus welcher man für $n=1$ ein früheres Resultat wieder findet.

Ohne auf die Erörterung weiterer Einzelheiten einzugehen, schliesse ich hiermit die vorliegende Arbeit, deren Zweck es vor Allem war, die beträchtliche Allgemeinheit der zur Sprache gebrachten Sätze hervorzuheben.